

ορισμός

14/04/2016

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Ευκλείδειος χώρος και W_1, W_2 υπόχωροι του V . Οι W_1, W_2 λέγονται ορθογώνιοι (ή κάθετοι) αν
$$\langle W_1, W_2 \rangle = 0_{\mathbb{R}} \text{ για κάθε } w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $V = \mathbb{R}^2$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $w_1 = \langle (1, 1) \rangle$, $w_2 = \langle (1, \alpha) \rangle$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$. Βρείτε όλα τα $\alpha \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι W_1, W_2 είναι ορθογώνιοι.

ΛΥΣΗ

Από Γραμμική I, $W_1 = \{ \lambda(1, 1) : \lambda \in \mathbb{R} \}$, $W_2 = \{ \mu(1, \alpha) : \mu \in \mathbb{R} \}$

Υποθ. W_1, W_2 ορθογώνιοι. Αφού $(1, 1) \in W_1, (1, \alpha) \in W_2 \Rightarrow$

$$\langle (1, 1), (1, \alpha) \rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow 1 + \alpha = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow \alpha = -1_{\mathbb{R}}.$$

Αντίστροφα, έστω $\alpha = -1_{\mathbb{R}}$ και $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$. Τότε, υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε $w_1 = \lambda(1, 1) = (\lambda, \lambda)$, $w_2 = \mu(1, \alpha) = \mu(1, -1) = (\mu, -\mu)$ και φανερά $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle (\lambda, \lambda), (\mu, -\mu) \rangle = \lambda\mu + \lambda \cdot (-\mu) = 0_{\mathbb{R}}$. Άρα

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Έστω V διανυσματικός χώρος W_1, W_2 υπόχωροι. Λέμε ότι αίθροισμα $W_1 + W_2$ είναι ΕΥΘΥ αν $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Άρα για $-1_{\mathbb{R}} = \alpha$, υπόχωροι W_1, W_2 είναι ορθογώνιοι και οπότε είναι η μοναδική τιμή του α , για την οποία οι υπόχωροι W_1, W_2 είναι ορθογώνιοι.

Αυτό είναι ισοδύναμο με $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Λέμε ότι ο δ.χ. V είναι το ευθύ αίθροισμα των υποχώρων W_1, W_2 αν $V = W_1 + W_2$ και το αίθροισμα $W_1 + W_2$ είναι ΕΥΘΥ. Γράφουμε τότε $V = W_1 \oplus W_2$.

Αν W υπόχωρος του V και Z υπόχωρος του V λέμε ότι το Z είναι ευθύ συνμνημό του W στο V αν $V = W \oplus Z$. Τέτοιο Z πάντα υπάρχει, και συνήθως δεν είναι μοναδικό. Στη Γραμ. Άλγεβρα I είδαμε αλγόριθμο υπολογισμού ενός τέτοιου Z .

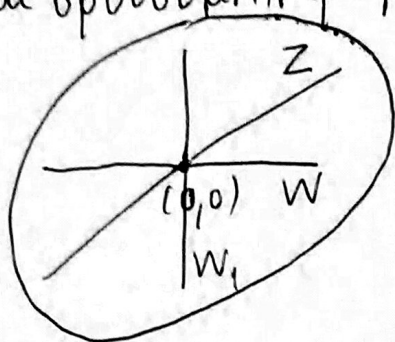
ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $(V, \langle \rangle)$ Χ.Ε.Γ με $V \neq \{0_V\}$ και $\dim V$ πεπερασμένη. Δύο υπόχωροι W_1, W_2 του V λέγονται ΟΡΘΟΣΥΜΜΗΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΙ αν $V = W_1 \oplus W_2$ και W_1, W_2 ορθογώνιοι μεταξύ τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $V = \mathbb{R}^2$ με το σύνθετο εσωτερικό γινόμενο και W_1, W_2 δύο κάθετες ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων τότε W_1, W_2 είναι ορθοσυμμηλθρωματικοί.

Ομοίως, αν $V = \mathbb{R}^3$ με το σύνθετο εσωτερικό γινόμενο, W_1 μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και W_2 το κάθετο επίπεδο στην W_1 που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε W_1, W_2 είναι ορθοσυμμηλθρωματικοί.



$(\mathbb{R}^2, \langle \rangle)$
↑
κοινότυπο
εσωτερικό
γινόμενο

(Επιμένουμε να περνάει από την αρχή των αξόνων για να είναι τα W_1, W_2 υπόχωροι, αλλιώς δεν είναι)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $(V, \langle \rangle)$ Χ.Ε.Γ με $V \neq \{0_V\}$ με $\dim V$ πεπερασμένης διάστασης και W υπόχωρος του V . Ορίζουμε τον υπόχωρο $W^\perp$ ως εξής:

$$W^\perp = \{v \in V : v \text{ κάθετο σε κάθε } w \in W\}$$

$$\text{Δηλ. } W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \text{ για κάθε } w \in W\}$$

Θα δείξουμε ότι: $W, W^\perp$ ορθοσυμμηλθρωματικοί στο V , ότι $W^\perp$ ο μοναδικός υπόχωρος του V με αυτήν την ιδιότητα, και θα δώσουμε αλγόριθμο υπολογισμού του $W^\perp$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Αν $W = \{0_V\}$, τότε $W^\perp = V$ γιατί ξέρουμε ότι $\langle v, 0_V \rangle = 0$ για κάθε $v \in V$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Αν $W = V$ τότε $W^\perp = \{0_V\}$. Αποδ. Φανερά $0_V \in W^\perp = V^\perp$ γιατί $\langle v, 0_V \rangle = 0$ για κάθε $v \in V$. Έστω $v \in V$ μη μηδενικό. Αφού $\langle \rangle$ εσωτερικό γινόμενο, $\langle v, v \rangle > 0$. Άρα $v \notin V^\perp$. Συμπεραίνουμε ότι $V^\perp = \{0_V\}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ κ.ε.τ., με $V \neq \{0\}$ και $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$ και W υπόχωρος του V .
Τότε:

i) Ο $W^\perp$ είναι υπόχωρος του V

ii) Οι $W, W^\perp$ είναι ορθοσυμμηληρωματικοί

iii) Αν Z υπόχωρος του V με W, Z ορθοσυμμηληρωμ., τότε $Z = W^\perp$

(Λέμε ότι $W^\perp$ είναι το (μοναδικό) ορθογώνιο συμμηλήρωμα του W στο V)

users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν $W = \{0\}$ τότε είδαμε $W^\perp = V$ και η πρόταση έπεται εύκολα. Άρα υποθέτουμε με $W \neq \{0\}$. Ο περιορισμός του εσωτερικού γινομένου του V στο W είναι εσωτερικό γινόμενο στο W (δηλ. η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ με $\langle w_1, w_2 \rangle_1 = \langle w_1, w_2 \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στο W). Άρα από αλγόριθμο ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt υπάρχει ορθοκανονική βάση $e_1, \dots, e_r$ στο W .

Αποδ. i) Εστω $w \in W, \lambda \in \mathbb{R}, z_1, z_2 \in W^\perp$. Έχουμε $\langle w, 0_V \rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow 0_V \in W^\perp$. Επίσης, $\langle w, z_1 + z_2 \rangle = \langle w, z_1 \rangle + \langle w, z_2 \rangle = 0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}$ αφού $z_1, z_2 \in W^\perp$. Επιπλέον $\langle w, \lambda z_1 \rangle = \lambda \langle w, z_1 \rangle = \lambda 0_{\mathbb{R}} = \lambda 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}$. Συνεπώς, $W^\perp$ υπόχωρος του V .

Αποδ. ii) Φανερά $W, W^\perp$ ορθογώνιοι. Άρα, υπάρχει να δείξουμε: i) $V = W + W^\perp$, ii) $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Αν $w \in W \cap W^\perp$ τότε $\langle w, w \rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow w = 0_V$. Άρα $W \cap W^\perp = \{0\}$. Τώρα θα δ.ο.: $V = W + W^\perp$. Εστω $v \in V$. Θέτουμε

$W = \sum_{i=1}^r \langle v_i, e_i \rangle e_i \in W, z = v - w$ αφού $e_1, \dots, e_r$ ορθοκ. βάση του W .

Έχουμε για κάθε t : $\langle z, e_t \rangle = \langle v - \sum_{i=1}^r \langle v_i, e_i \rangle e_i, e_t \rangle =$

$= \langle v, e_t \rangle - \sum_{i=1}^r \langle v_i, e_i \rangle \langle e_i, e_t \rangle = \langle v, e_t \rangle - \langle v, e_t \rangle \langle e_t, e_t \rangle = 0_{\mathbb{R}}$

Αφού $e_i \xrightarrow{i=1}^r$ βάση του W έχουμε $z \in W^\perp$ και $V = W + (z - w)$

Άρα, $V = W + z$ και το ii) έπεται. ($V = W + Z$)*

Αποδ. iii) Υποθ. Z υπόχωρος του V και W, Z ορθοσυμμηληρωματικοί. Θα δείξουμε ότι $Z = W^\perp$. Πράγματι, Z κάθετο στο $W \Rightarrow$

$\langle z, w \rangle = 0_{\mathbb{R}}$ για κάθε $z \in Z, w \in W \Rightarrow \{z \in W^\perp\}$ Αφού δείξαμε

$V = W \oplus W^\perp \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} W^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W$

και αφού $V = W \oplus Z \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} Z = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W$

Από (1) και (2) $\Rightarrow Z = W^\perp$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. με $V \neq \{0\}$ και $\dim V$ πεπερασμένη. Ορίζουμε την γραμμική απεικόνιση ορθογώνιας $\mathbb{R}$ προβολής στο W ως εξής:
Αν $W = \{0\}$, τότε $\pi(v) = 0_V$ για κάθε $v \in V$.
Αν $W \neq \{0\}$ και $e_1, \dots, e_p$ ορθοκανονική βάση του W ορίζουμε:

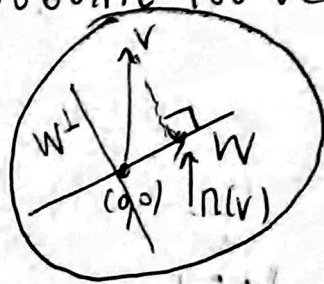
$$\pi(v) = \sum_{i=1}^p \langle v, e_i \rangle e_i$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ π (ΕΥΚΟΛΗ ΑΣΚΗΣΗ)

- 1 π γραμμική, γιατί $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (το εσωτερικό γινόμενο) γραμμικό.
- 2 Η π δεν εξαρτάται από την επιλογή των ορθοκανονικής βάσης
 $e_1, \dots, e_p$ του W
- 3 Η $\pi: V \rightarrow W$ είναι EPI , και αν $W \in W$ $\pi(W) = W$
- 4 Αν $v \notin W$ το $v - \pi(v) \in W^\perp$ (το είδαμε στην προηγούμενη απόδειξη).
- 5 Το $\pi(v)$ είναι το μοναδικό σιάνυσμα $z \in W$ ώστε $\|v - z\|$ ελάχιστο δυνατό (Απόδειξη παραιλείται)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$V = \mathbb{R}^2$ με συνήθες εσωτερικό γινόμενο $W \in \mathbb{R}^2$ 1-διάστατος υπόχωρος. $\pi: V \rightarrow W$ η ορθογώνια προβολή του $V = \mathbb{R}^2$ στην ευθεία W .
Για $w \in W$ από iii) $\pi(w) = w$
Για $v \in V - W$ υπολογίζουμε το $\pi(v)$ ως εξής: ΒΗΜΑ 1ο:
Φέρνουμε από το v ευθεία κάθετη στο W . ΒΗΜΑ 2ο: $\pi(v)$ είναι η τομή αυτής της ευθείας με το W .



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ισχύει και η ιδιότητα 6 που λέει $\text{Ker } \pi = W^\perp$

(Απόδειξη: $\pi(v) = \sum_{i=1}^p \langle v, e_i \rangle e_i$ άρα αφού $e_1, \dots, e_p$ γραμμικώς ανεξαρτήτως (σαν $\sum_{i=1}^p e_i$ βάση του W) έχουμε $\pi(v) = 0_V \Leftrightarrow \langle v, e_i \rangle = 0 \mathbb{R}$ για κάθε $i=1, 2, \dots, p$ το οποίο είναι ισοδύναμο με $\langle v, w \rangle = 0 \mathbb{R}$ για κάθε $w \in W$ (άμεσο) το οποίο είναι ισοδύναμο με $v \in W^\perp$.

ΑΣΚΗΣΗ 4 ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 5

$$(\mathbb{R}^4, \langle \rangle) \quad V = \{ (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \mathbb{R} \}$$

$$W = \{ (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \}$$

Δείξτε ότι V, W ορθοσυμπληρωματικοί υπόχωροι:

ΛΥΣΗ:

Ορθοσυμπληρωματικοί σημαίνει: 1) V, W ορθογώνιοι
2) $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$ δηλαδή
2.1) $\mathbb{R}^4 = V + W$
2.2) $V \cap W = \{ 0 \mathbb{R}^4 \}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 1)

Εστω $v \in V, w \in W$. Θα δείξω ότι $\langle v, w \rangle = 0 \mathbb{R}$. Αφού $v \in V$, υπάρχουν $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ με $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \mathbb{R}$ (*) και $v = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Αφού $w \in W$, υπάρχει $w \in \mathbb{R}$ με $w = (b, b, b, b)$. Έχουμε $\langle v, w \rangle = \langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b, b, b, b) \rangle = a_1 b + a_2 b + a_3 b + a_4 b = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) b \stackrel{(*)}{=} 0 \mathbb{R} \cdot b = 0 \mathbb{R}$ ■

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 2)

Α' ΤΡΟΠΟΣ: Βλέπε Γραμμική Άλγεβρα Ι.

Β' ΤΡΟΠΟΣ: Απόδειξη 2.1) δηλ. ότι $\mathbb{R}^4 = V + W$

Εστω $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4$. (ΑΝΑΛΥΣΗ. Υποθέτουμε ότι:

$$z = (a_1, a_2, \dots, a_4) + (b, b, b, b) \Rightarrow (z_1, z_2, z_3, z_4) =$$

$$= (a_1 + b, a_2 + b, a_3 + b, a_4 + b) \Rightarrow z_1 + \dots + z_4 = (a_1 + b) + (a_2 + b) + \dots$$

$$+ (a_4 + b) = (a_1 + \dots + a_4) + 4b = 4b \Rightarrow b = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 z_i$$

Άρα, θέτουμε $b = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 z_i$ $w = (b, b, b, b)$, $v = (z_1 - b, z_2 - b, z_3 - b, z_4 - b)$

τότε, $z = v + w, w \in W, \text{ και } v \in V$ (γιατί $(z_1 - b) + \dots + (z_4 - b) = 0 \mathbb{R}$)

Άρα $\mathbb{R}^4 = V + W$, δείξαμε το 2.1) ■

Απόδειξη του 2.2) Εστω $v \in V \cap W$ και $v = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αφού } v \in W : a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \\ v \in V : a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \mathbb{R}$$

Άρα $v = 0 \mathbb{R}^4 \Rightarrow V \cap W = \{ 0 \mathbb{R}^4 \}$, άρα το 2.2) έπεται. ■

ΑΣΚΗΣΗ 2 ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 5 (Παραλλαγή)*

$$V = \mathbb{R}_3[x], \langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad W = \langle x, x^2, x^3 \rangle$$

Βρείτε ορθοκανονική βάση του W .

ΛΥΣΗ: Θέτουμε $g_1 = x, g_2 = x^2, g_3 = x^3$. Έχουμε g_1, g_2, g_3 γραμμικώς ανεξάρτητα, γιατί αν $\lambda_1, \dots, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = \text{μηδεν. πολυώνυμ.}$
 $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \in \mathbb{R}$. Συμπέρασμα: $g = (g_1, g_2, g_3)$ ΒΑΣΗ του W .

ΒΗΜΑ 2: Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στη βάση g_1, g_2, g_3 . Πρώτα θέτουμε $h_1 = g_1$

$$h_2^* = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} h_1$$

$$h_3 = g_3 - \frac{\langle g_3, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} h_1 - \frac{\langle g_3, h_2 \rangle}{\|h_2\|^2} h_2$$

Τότε: $e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}, e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}, e_3 = \frac{h_3}{\|h_3\|}$ ορθοκανονική βάση του W .

$$\|h_1\|^2 = \langle h_1, h_1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\langle g_2, h_1 \rangle = \int_0^1 x \cdot x^2 dx = \frac{1}{4} \quad (\text{και έτσι: } h_2^* = x^2 - \frac{3x}{4})$$

Τελικά αποτελέσματα (Άσκηση).

ΑΣΚΗΣΗ 3 ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 5

Υπολογισμός ορθοκανονικής βάσης του V .

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$$

ΒΗΜΑ 1ο Όπως στη Γραμμική Άλγεβρα I βρίσκω g_1 g_2
βάση του V .

$$V = \{(x, y, z) : x - y - z = 0\} = \{(y + z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$$

Τα g_1, g_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα γιατί:

$$\lambda(1, 1, 0) + \mu(1, 0, 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 0 \in \mathbb{R}$$

Άρα g_1, g_2 βάση του V . Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στη
βάση g_1, g_2 του V . Θέτουμε $h_1 = g_1$

$$h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} h_1$$

$$e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}, \quad e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}$$

Μετά τις πράξεις: $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$

$$e_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$$

ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΗ
ΒΑΣΗ ΤΟΥ V .

Ομοίως, βρίσκουμε πρώτα βάση του W και μετά με
Gram-Schmidt ορθοκανονική βάση του.

ΒΗΜΑ 2ο Υπολογισμός ορθογώνιας προβολής $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow V$

Αφού e_1, e_2 ορθοκανονική βάση του V , ξέρουμε ότι

$z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$, $\pi(z) = \langle z, e_1 \rangle e_1 + \langle z, e_2 \rangle e_2$. Άρα, για

$$z = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3, \quad \pi((1, 1, 1)) = \langle (1, 1, 1), e_1 \rangle e_1 + \langle (1, 1, 1), e_2 \rangle e_2 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} e_2 = (1, 1, 0) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

"ΣΥΝΕΧΕΙΑ"